

Engenharia de Controle: Fundamentos e Aulas de Laboratório

Listas de Exercícios

Profs. Vilma A. Oliveira e Manoel L. Aguiar

Exercícios Capítulos 2 e 3

1. Desenhar o diagrama de blocos do sistema de suspensão magnética abaixo identificando a saída, entrada e as variáveis de atuação.

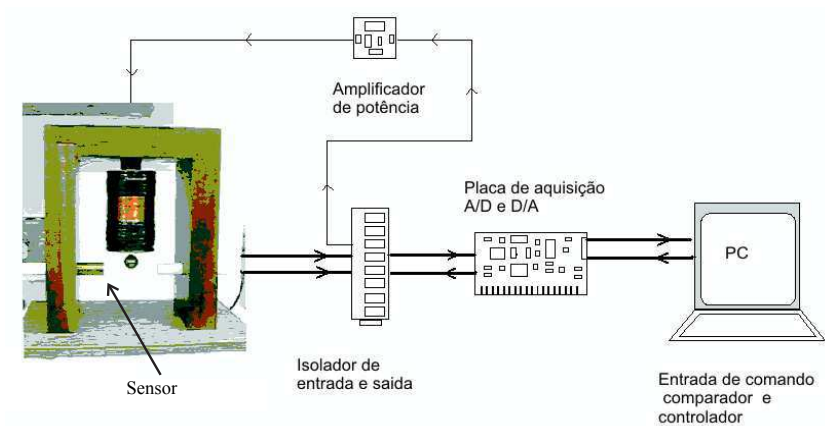


Figura 1: Diagrama esquemático do sistema de suspensão magnética com realimentação da posição.

2. Escrever as equações dinâmicas e obter as funções de transferência para os circuitos avanço e atraso de fase da Figura 2.
3. Equações diferenciais e funções de transferência do motor CC.
 - (a) Considere o motor de corrente contínua (CC) descrito pelo diagrama eletromecânico equivalente mostrado na Figura 3 com parâmetros definidos na Tabela 1. Obter as equações de movimento do rotor, do circuito elétrico da armadura e a equação diferencial do motor CC para a velocidade e tensão aplicada na armadura. Utilizando a lei de Newton para sistemas rotacionais obtém-se o torque que faz o eixo girar:

$$T_e(t) = K_t i_a(t) = J \frac{d}{dt} \omega(t) + B \omega(t) + F.$$

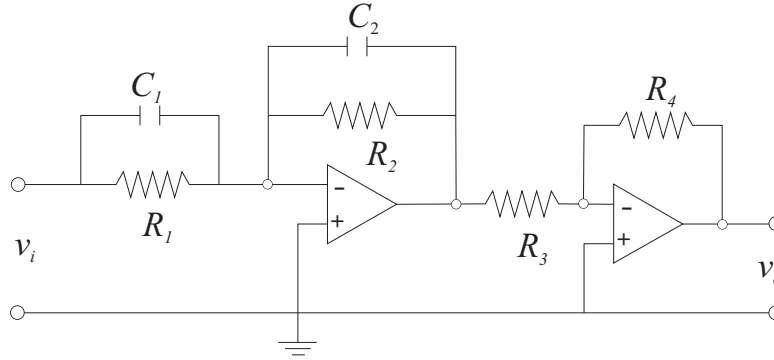


Figura 2: Circuito avanço ($R_1C_1 > R_2C_2$) ou atraso ($R_1C_1 < R_2C_2$).

Por sua vez, utilizando a lei de tensão de Kirchhoff obtém-se:

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + K_e \omega(t).$$

Usando o operador $p = \frac{d}{dt}$ pede-se verificar que a equação diferencial de ordem 2, que relaciona a velocidade ω e a tensão v_a aplicada na armadura para $F = 0$, é a seguinte:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

com $a_2 = L_a J$, $a_1 = (R_a J + L_a B)$, $a_0 = (R_a B + K_t K_e)$, $u(t) = K_t v_a(t)$ e $y(t) = \omega(t)$.
Sugestão: Obter $i_a(t)$ da equação de torque e substituir na equação da tensão.

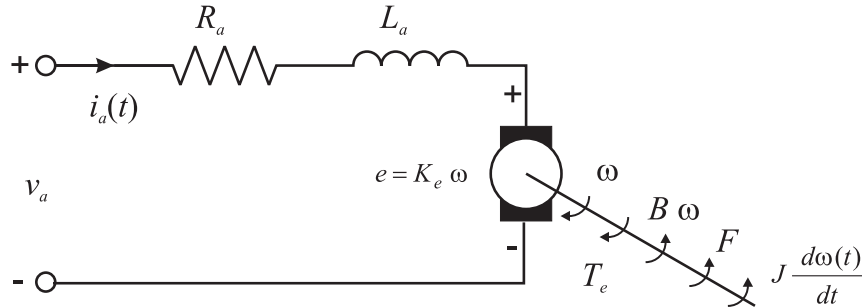


Figura 3: Diagrama eletromecânico do motor CC.

Tabela 1: Parâmetros do motor.

Parâmetros Elétricos	Parâmetros Mecânicos
R_a resistência armadura [Ω]	J momento inércia [$\text{N.m.s}^2/\text{rad}$]
L_a indutância armadura [H]	B coeficiente atrito viscoso [$\text{N.m.s}/\text{rad}$]
K_e constante f.c.e.m [$\text{V.s}/\text{rad}$]	K_t constante torque [$\text{N.m}/\text{A}$]

- (b) A partir da equação de torque e de tensão com $F = 0$ do Item 3a determinar as seguintes funções de transferência:

$$G_1(s) = \frac{\omega(s)}{v_a(s)} \quad G_2(s) = \frac{\theta(s)}{v_a(s)} \quad G_3(s) = \frac{i_a(s)}{v_a(s)} \quad G_4(s) = \frac{T_e(s)}{v_a(s)}$$

$$G_5(s) = \frac{\omega(s)}{i_a(s)} \quad G_6(s) = \frac{\theta(s)}{i_a(s)} \quad G_7(s) = \frac{T_e(s)}{i_a(s)}.$$

- (c) Obter o diagrama de blocos do motor para entrada $v_a(s)$ e saída $\theta(s)$.
- (d) Incluir um torque de perturbação na equação de torque e refazer o diagrama de blocos do Item 3c também para $F = 0$.
4. A Figura 4 representa um sistema de suspensão magnética. A modelagem do sistema de suspensão eletromagnética é baseada em suas equações dinâmicas: eletromecânica, mecânica e elétrica dadas no Capítulo 2, repetidas aqui para fácil referência:

$$f(h, i) = \frac{-L_0}{2a} \frac{i^2}{(1 + h/a)^2}$$

$$m \frac{d^2h}{dt^2} = mg + f(h, i)$$

$$k_a v = Ri + L \frac{d(i)}{dt}$$

em que $f(., .)$ é a força eletromagnética, i é a corrente da bobina e $k_a v$ é a tensão aplicada na bobina com k_a o ganho do amplificador de potência; L e R são a indutância e a resistência da bobina, respectivamente, a e L_0 constantes.

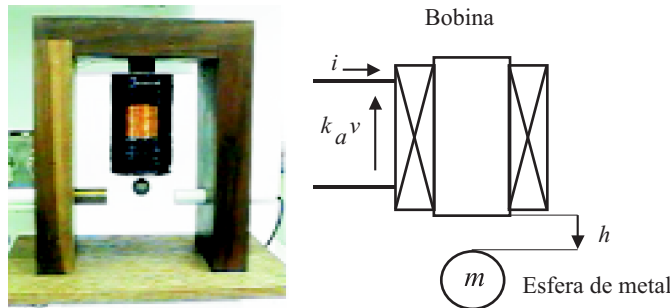


Figura 4: Diagrama de blocos do Exercício 4.

- (a) Para $x_1 = h$, $x_2 = \dot{h}$, $x_3 = i$ e $y = c_1 h$ com c_1 uma constante, a saída do sensor de posição verificar que o modelo espaço de estado do sistema é dado por:

$$\dot{x} = F(x) + Bv, \quad y = Cx,$$

em que

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \left(\frac{L_0}{2am} \right) \left(\frac{x_3}{1 + (x_1)/a} \right)^2 \\ \frac{R}{L} x_3 \\ -\frac{R}{L} x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_a/L \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \ 0 \ 0].$$

(b) Obter os pontos de equilíbrio.

(c) Linearizar as equações do sistema de suspensão a partir da expansão de primeira ordem de Taylor em torno de (h_e, i_e) para $\zeta = [h - h_e \ \dot{h} \ i - i_e]^T$ e $u = v - \frac{Ri_e}{k_a}$.

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_2/m & 0 & k_1/m \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_a/L \end{bmatrix}$$

em que

$$k_1 := \left. \frac{\partial f}{\partial x_3} \right|_{(x_{1e}, x_{3e})} = \frac{L_0 x_{3e}}{[a(1 + x_{1e}/a)^2]};$$

$$k_2 := \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(x_{1e}, x_{3e})} = -\frac{L_0 x_{3e}^2}{[a^2(1 + x_{1e}/a)^3]}.$$

Observação: No ponto de equilíbrio (h_e, i_e) , tem-se $mg = -f(h_e, i_e)$.

(d) Verificar se o modelo linearizado representa o sistema não linear na vizinhança do ponto de equilíbrio.

(e) Obter a função de transferência para $h_e = 4,5 \times 10^{-3}$ m, $i_e = 5,773 \times 10^{-1}$ A, $L = 5,2 \times 10^{-1}$ H, $R = 2,1 \times 10^1 \Omega$, $k_a = 2,1$ V/V, $c_1 = -1,7361 \times 10^3$ V/m, $L_0 = 2,49 \times 10^{-2}$ H, $a = 6,72 \times 10^{-3}$ m e $m = 2,26 \times 10^{-2}$ kg.

Exercícios Capítulo 4

5. Funções de transferência e forma espaço de estado.

(a) Considere o diagrama de blocos mostrado na Figura 5. Observe que a_i , $i = 1, 2, 3$ e b_j , $j = 0, 1, 2$ são constantes. Esta estrutura especial é chamada forma canônica controlável. Pede-se:

- i. Obter a função de transferência entre u e y ;
- ii. Substituir valores para a_i , $i = 1, 2, 3$ e para b_j , $j = 0, 1, 2$ e obter os polos do sistema.

(b) Obter as funções de transferência dos diagramas de blocos mostrados na Figura 6.

(c) Obter uma realização espaço de estado para o diagrama da Figura 6b escolhendo as variáveis de estado como as saídas dos integradores.

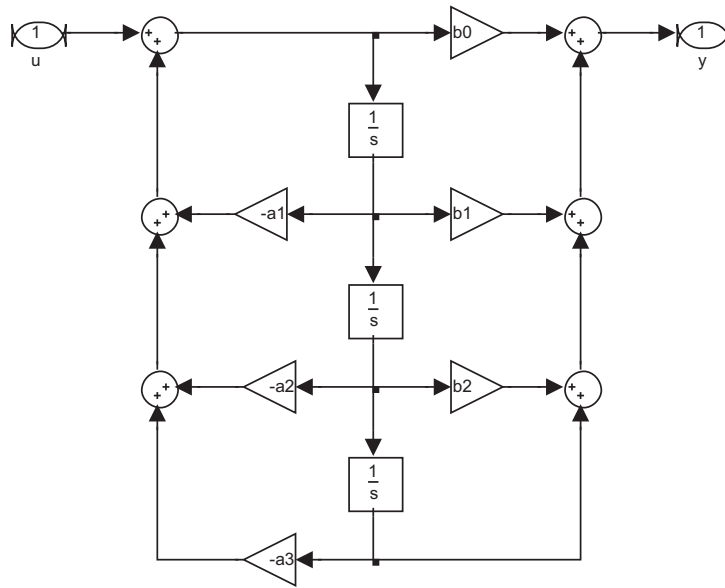
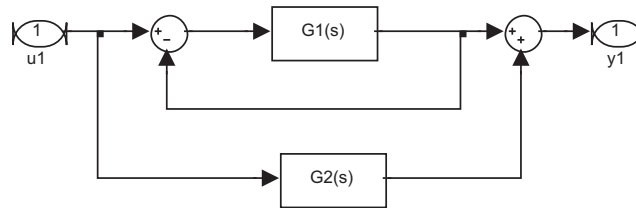
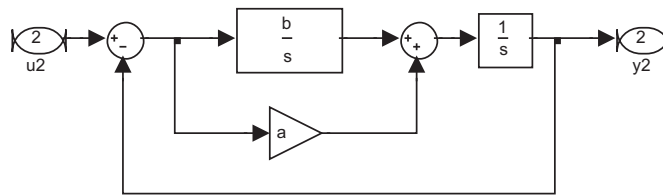


Figura 5: Diagrama de blocos do Item 5a.



(a)



(b)

Figura 6: Diagramas de blocos dos Itens 5b e 5c.

6. Considere o circuito RLC mostrado na Figura 7.

- (a) Obter a equação diferencial relacionando $i(t)$ e $u(t)$.
- (b) Obter a equação diferencial relacionando $i(t)$ e $y(t)$.
- (c) Mostrar que admitindo todas as condições iniciais nulas seu modelo é representado

por:

$$y(s)/u(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

em que $\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$ e $\zeta = \frac{R}{2\sqrt{L/C}}$.

- (d) Obter os valores de R que produz $y(t)$ com um sobressinal menor que 25% para $u(t)$ uma entrada degrau unitário, $L = 10mH$ e $C = 4\mu F$.

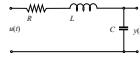


Figura 7: Diagrama de blocos do Exercício 6.

7. Considere o pêndulo simples, mostrado na Figura 8, cuja dinâmica é dada pela seguinte equação não-linear:

$$m\ell^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = u$$

em que u é o torque externo aplicado, ℓ é o comprimento do pêndulo, b o coeficiente de atrito viscoso no apoio, m a massa e g a aceleração da gravidade. Para $m=0,2$ kg, $\ell=0,3$ m, $g=9,8$ m/s², $b=0,006$ N.m.s pede-se:

- Obter o modelo espaço de estado do pêndulo na forma vetorial $\dot{x} = F(x, u)$ com $x = [\theta \ \dot{\theta}]^T$.
- Verificar que os pontos equilíbrio x_e com $u_e = 0$ são dados por $(n\pi, 0)$, $n = 0, 1, \dots$.
- Obter o modelo linearizado do pêndulo para a posição de equilíbrio dada por $x_e = [\pi \ 0]^T$ e $u_e = 0$.
- Investigar a estabilidade do ponto de equilíbrio do pêndulo $x_e = [\pi \ 0]^T$ e $u_e = 0$ via 1º método de Lyapunov.

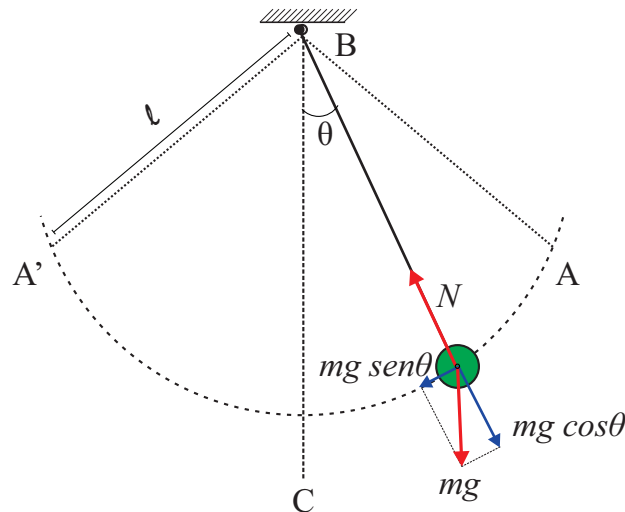


Figura 8: Sistema do Exercício 7.

8. Considere as equações de um pêndulo linearizadas em torno do ponto de equilíbrio estável

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{\ell} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

em que $x = [\theta \ \dot{\theta}]^T$ e u uma força denotada F aplicada pelo vento.

- Definindo $y = x_1$, obter a função de transferência $G(s)$ entre u e x_1 .
- Suponha que a força aplicada pelo vento é do tipo $F(t) = A \text{sen}(\omega t)$ com ω na faixa de 0,02 e 2 Hz. Para $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $\ell = 0,4 \text{ m}$, $m = 0,1 \text{ kg}$ e $b = 0,25 \text{ N.m.s}$, obter o diagrama de Bode na faixa de interesse.
- Usando o diagrama de Bode, obter o valor de frequência da força aplicada que produziria a maior amplitude na resposta do ângulo θ . Usando $\theta(t) = A|G(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \phi)$ com $\phi = \angle(G(j\omega))$ verificar que a amplitude máxima para a força pode ser escrita em termos do θ máximo como $A_{max} = \frac{\theta_{max}}{84\%}$.

9. A função de transferência de malha aberta de um reator químico é dada por:

$$G(s) = \frac{8e^{-0,2s}}{s(s+4)(s+12)}$$

- Plotar o diagrama de Bode de $G(s)$. Lembrar que

$$\begin{aligned} |e^{-0,2j\omega}| &= 1 \\ \angle e^{-0,2j\omega} &= -0,2\omega \text{ (rad)}. \end{aligned}$$

10. Considere o sistema descrito pela função de transferência $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{3 \times 10^5}{(s+1000)(s+4000)(s^2+20s+2600)}$$

- Calcular os polos de $G(s)$.
- Esboçar o diagrama de Bode para $G(s)$ usando assíntotas.
- Obter o diagrama de Bode no Matlab e comparar o diagrama obtido com o diagrama assintótico obtido no item anterior.
- Dado que os polos dominantes estão associados com as dinâmicas mais lentas do sistema, como é possível identificar estes polos no diagrama de Bode?
- Determinar uma nova função de transferência denotada $G_1(s)$ de 2ª ordem com polos iguais aos polos complexos de $G(s)$. Estes polos são dominantes?

- (f) Para $G_1(s)$ calcular a frequência de ressonância denotada ω_r e o pico de ressonância denotado M_r e comparar com os valores obtidos através do diagrama de Bode para $G(s)$. Usar as seguintes expressões para obter ω_r e M_r :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

- (g) Verificar se o diagrama de Bode possui frequências de cruzamento de fase. Qual a implicação da existência dessa frequência em caso de implementar uma realimentação unitária negativa para o sistema descrito pela função de transferência $G(s)$?
11. Considere o sistema descrito pelo diagrama de blocos da Figura 9.
- (a) Usando as variáveis indicadas no diagrama, escreva a representação espaço de estado. É um sistema realimentado?
- (b) Obter a função de transferência entre y e u a partir de manipulação do diagrama de blocos.
- (c) Verificar se o sistema é estável.

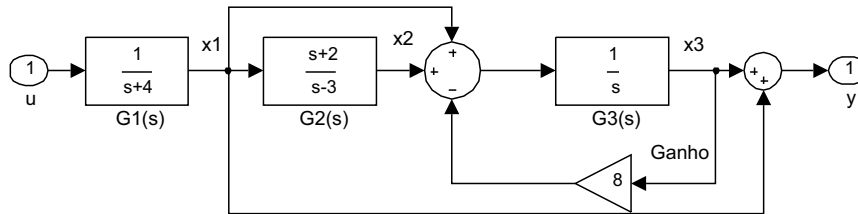


Figura 9: Diagrama de blocos do Exercício 11.

12. Um autopiloto de um navio é utilizado para manter o seu curso. Um modelo linearizado do navio é dado pela seguinte equação diferencial:

$$M \ddot{\theta}(t) = -d\dot{\theta}(t) - c\alpha(t) + w(t)$$

$$\dot{\alpha}(t) = -0,1\alpha(t) + 0,1u(t)$$

em que $\theta(t)$ é o erro de rumo, $\alpha(t)$ é o ângulo do leme, $w(t)$ é um torque de perturbação e u é o ângulo de comando do leme. Um diagrama esquemático do navio é mostrado na Figura 10. Os parâmetros do navio seguem: $M = 10^7 \text{kg.m}^2$ é o momento de inércia do navio em torno do eixo vertical relativo ao centro de gravidade, $d = 10^6 \text{N.m.s/rad}$ é o coeficiente de arrasto associado à rotação e $c = 5000 \text{N.m/rad}$ é um coeficiente relacionando o ângulo do leme ao torque aplicado. O ângulo θ é medido por uma bússola. O autopiloto precisa fazer a medição deste ângulo e gerar um ângulo de comando para o leme.

- (a) Obter o modelo espaço de estado com $x = [\theta \ \dot{\theta} \ \alpha]$ e $y = \theta$.

- (b) Usando integradores, obter o diagrama de blocos do sistema.
- (c) Obter as funções de transferência do atuador, ou seja, a função de transferência entre α e u . Obter também a função de transferência entre a saída da planta e a saída do atuador, ou seja, entre θ e α .

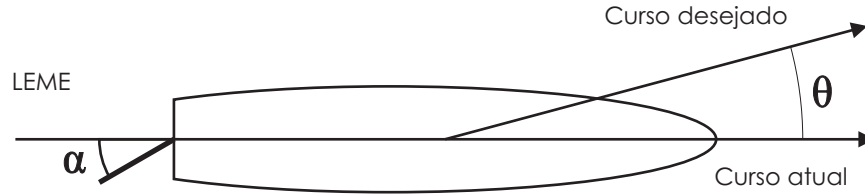


Figura 10: Sistema do Exercício 12.

13. Um sistema de controle de posição possui a seguinte função de transferência de malha fechada:

$$T(s) = \frac{0,5(s + 10)}{(s + 40)(s^2 + 1,4s + 1)}.$$

- (a) Obter o diagrama de polos e zeros do sistema e verificar a dominância dos polos complexos.
- (b) Obter o valor aproximado do coeficiente de amortecimento (ζ) e do sobressinal (M_p) da resposta de $T(s)$ a uma entrada degrau.

Exercícios Capítulo 5

14. Um certo sistema de controle descrito por $T(s) = \frac{y}{r}$ deve atender as seguintes especificações: $t_r \leq 0,010$ s e sobressinal $M_p \leq 16\%$.

- (a) Esboçar a região no plano-s para os polos de segunda ordem de um sistema que atendam as especificações de t_r e M_p .
- (b) Seja:

$$\frac{y}{r} = \frac{KG}{1 + KG}$$

com G a função de transferência de malha aberta e K um ganho fixo. Verificar que para atender uma especificação de erro de regime permanente à entrada rampa unitária finita $\frac{|e(t)|}{|r(t)|} = 0,002$ quando $t \rightarrow \infty$, $G(s)$ deve possuir um integrador. Qual deve ser o valor de K ? Dica: Responder analisando

$$e = Sr$$

e o teorema do valor final.

15. Considere o sistema mostrado na Figura 11 em que $G(s)$ é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{(10s + 1)(s + 1)}.$$

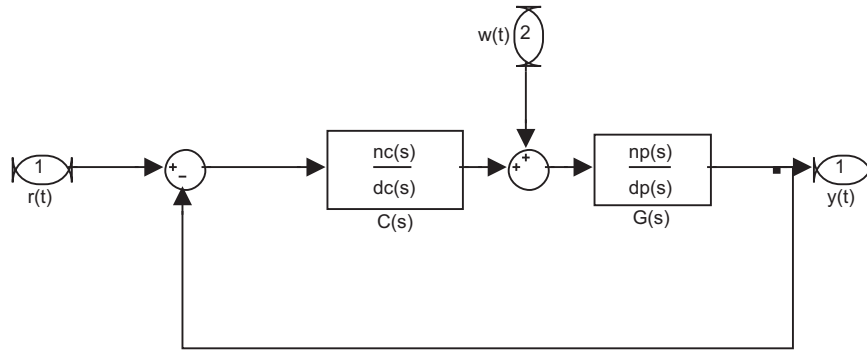


Figura 11: Diagrama de blocos do Exercício 15.

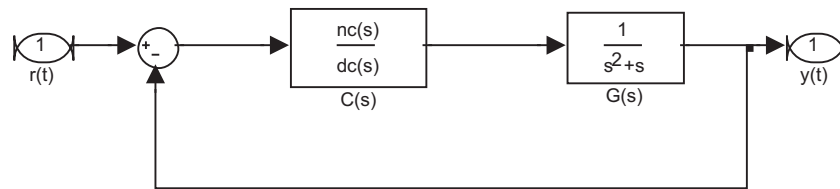


Figura 12: Sistema de controle do Exercício 16.

- Determinar o tipo do sistema e o erro com respeito ao seguimento de entradas de referência degrau e rampa para os controladores P: $C(s) = K_P$, PD: $C(s) = K_P + K_D s$ e PID: $C(s) = K_P + K_I/s + K_D s$.
- Determinar também para os mesmos controladores P, PD e PID do Item 15a o tipo do sistema com respeito a entrada de perturbação degrau $w(t)$ na entrada da planta.
- O sistema é melhor para seguir a referência do que rejeitar perturbações? Explicar resumidamente usando as respostas obtidas.
- Verificar os resultados obtidos nos Itens 15a e 15b para o erro usando o Matlab ou Simulink para plotar as respostas ao degrau e rampa para ambas as entradas de referência e perturbação.

16. Considere o sistema mostrado na Figura 12, em que:

$$C(s) = K \frac{(s + \alpha)^2}{s^2 + \omega_0^2}.$$

- Obter a função de transferência de r para o erro definido por $e = r - y$.
- Verificar que para uma entrada senoidal $r(t) = \sin \omega_0 t$ o erro de regime dado por $\lim_{t \rightarrow 0} e(t)$ é igual a zero. Usar $r(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$.

Exercícios Capítulo 6

17. A resposta em frequência da planta $G(j\omega)$ e do controlador $C(j\omega)$ são dados na Tabela 2. Obter as margens de ganho e fase supondo uma realimentação unitária.

Tabela 2: Resposta em frequência do Exercício 17

ω rad/s	$ G(j\omega) $ db	$\angle G(j\omega)$ graus	$ C(j\omega) $ db	$\angle C(j\omega)$ graus
0,001	20	0	0	0
0,010	15	-30	-2	-30
0,100	10	-40	-4	-40
1	5	-100	-5	-60
10	2	-110	-5	-65
100	1	-115	-5	-65
1000	0,5	-120	-6	-70

18. A resposta em frequência de um sistema típico de temperatura $G(j\omega)$ e de um controlador avanço de fase $C(j\omega)$ são dados na Tabela 3. Pede-se:

- Obter as margens de ganho e fase supondo uma realimentação unitária;
- Sabendo que o sistema típico de temperatura é estável, verificar se o sistema a malha fechada é estável.

Tabela 3: Resposta em frequência do Exercício 18.

ω rad/s	$ G(j\omega) $ db	$\angle G(j\omega)$ graus	$ C(j\omega) $ db	$\angle C(j\omega)$ graus
0,01	19	-2	0,0002	0,3
0,1	18	-19	0,01	3,4
0,4	16	-71	0,3	13,4
0,5	14,9	-85	0,45	16,5
1	8,1	-135	1,57	29,9
2,2	-5,1	-190	5,1	47
4	-18,3	-222	8,8	54,5
5,5	-26	-234,6	11	54,6
10	-41	-250	15	47
20	-59	-260	18	32
40	-77	-264	19	18
100	-101	-267	19	7,7

19. Linearizando as equações do sistema de suspensão em torno de uma posição de equilíbrio obtém-se a seguinte função de transferência entre a entrada do amplificador de potência e a saída do sensor:

$$G(s) = \frac{568050,4927}{(s - 41,82)(s + 41,82)(s + 38,27)}$$

- Verificar que o sistema a malha aberta é instável.

- (b) Usando o lugar das raízes verificar que o sistema não pode ser estabilizado por um controlador proporcional. Verificar que um controlador avanço de fase pode estabilizar o sistema.
20. Considere o sistema descrito pelo diagrama Simulink mostrado na Figura 13 com $C(s) = K$ e $G(s) = 10(s + 1)/(s(s - 10))$. O diagrama de Nyquist dado pelo Matlab para $K=1$ é mostrado na Figura 14.
- (a) O diagrama da Figura 14 foi obtido via Matlab. Como o sistema a malha aberta tem um polo na origem, para $s \rightarrow 0$ o módulo de $G(s)$ tende para o infinito e esse trecho do diagrama não é mostrado. Para aplicar o critério de Nyquist, fechar o diagrama de Nyquist. Determinar as margens de ganho e fase.
- (b) Usando o diagrama de Nyquist completo, encontrar a faixa de valores do ganho K para estabilidade e também para instabilidade indicando o número de polos da função de transferência da malha fechada no semiplano direito do plano s quando for o caso. Usar o lugar das raízes para confirmar a análise.

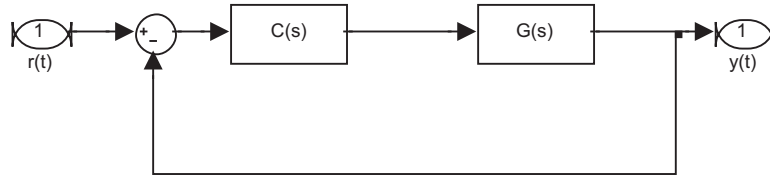


Figura 13: Diagrama em blocos do sistema do Exercício 20.

21. Considere o sistema de controle de suspensão magnética descrito pelo diagrama de blocos mostrado na Figura 15 com $k_1 = 0,770 \text{ N/A}$; $k_2 = 39,6 \text{ N/m}$; $L = 0,520\text{H}$; $R = 19,9 \Omega$; $m = 0,0226 \text{ kg}$; $k_a = 2,1$; $c_1 = -1,7361 * 10^3 \text{ V/m}$; $t_z = 0,068\text{s}$; $t_p = 0,002\text{s}$; $k_c = 0,4$. A função de transferência de malha aberta é dada por $G_{ma} = \text{series}(\text{planta}, \text{controlador})$ em que $G = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$ com $\text{den} = [1 \ R/L \ -k_2/m \ -k_2*R/(m*L)]$, $\text{num} = -k_a*k_1*c_1/(m*L)$ e $C = \text{tf}(\text{numc}, \text{denc})$ com $\text{numc} = [k_c*t_z \ k_c]$; $\text{denc} = [t_p \ 1]$. O diagrama de Nyquist para o sistema de malha aberta com controlador é mostrado na Figura 16.
- (a) Determinar as margens de ganho e fase com $\alpha = |CG(j\omega)|$ em $\omega = 106 \text{ rad/s}$ e $\beta = |CG(j\omega)|, \omega = 0$.
- (b) Analisar a estabilidade do sistema via critério de Nyquist quando o ganho varia de zero a infinito. Usar o lugar das raízes para confirmar a análise.
22. Considere a função de transferência de malha aberta

$$L(s) = K \frac{(s + 1)(s + 2)}{s^2(s + 3)(s^2 + 2s + 25)}$$

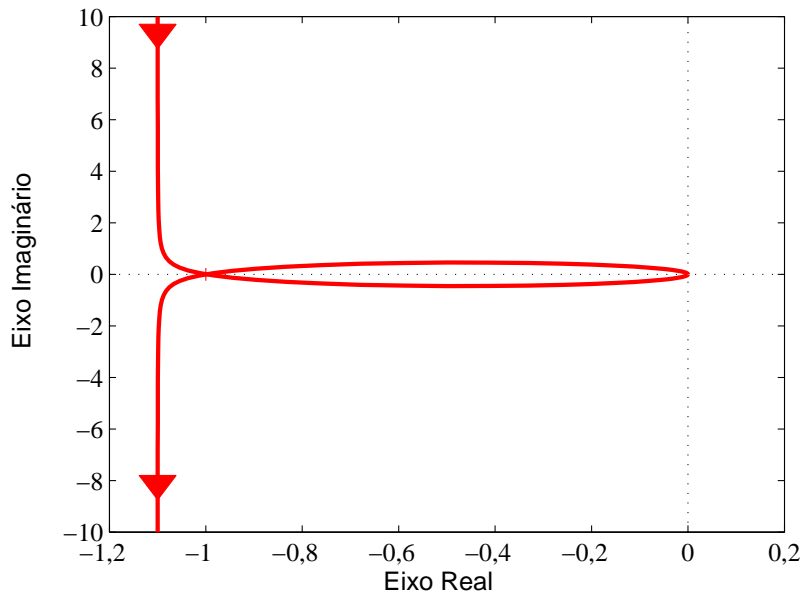


Figura 14: Diagrama de Nyquist para o sistema do Exercício 20.

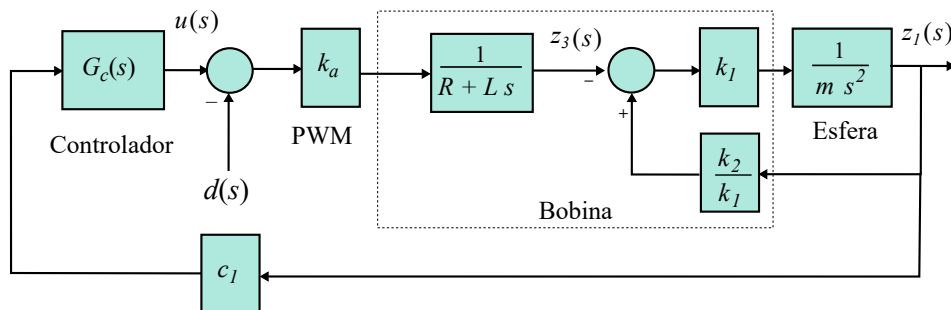


Figura 15: Diagrama em blocos do sistema linearizado em malha fechada.

- (a) Usar o diagrama de Bode e o lugar das raízes para determinar o ganho e a frequência que ocorre instabilidade.
 - (b) Determinar o ganho (ou ganhos) que levam à uma margem de fase (θ_m) de 20° .
 - (c) Para o ganho ou ganhos encontrados acima, determinar também a margem (ou margens) de ganho (A_m).
23. O diagrama de Bode de um sistema obtido experimentalmente é mostrado na Figura 17. Sabe-se que o sistema é de fase mínima (não possui polos nem zeros no semiplano direito do plano s). Pelo diagrama pode-se notar que existe um par de polos complexos em $\omega = 2$ rad/s.
- (a) Analisar a estabilidade do sistema com função de transferência $G(s)$ usando realimentação unitária a partir das medidas da margens de ganho e fase.

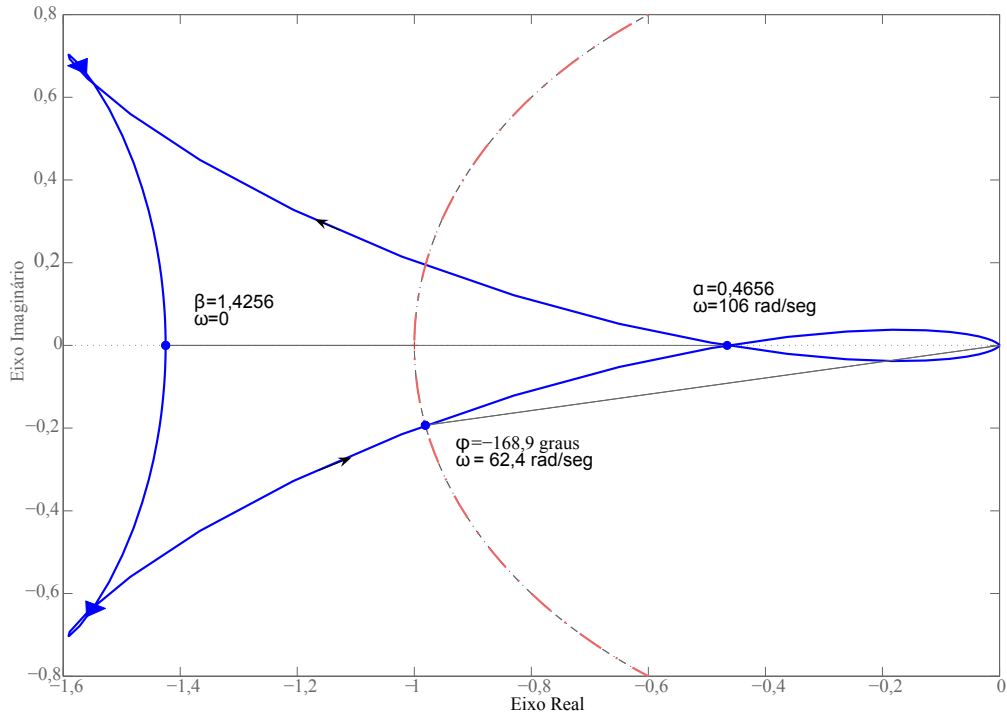


Figura 16: Diagrama de Nyquist do sistema de suspensão.

- (b) Determinar o coeficiente de amortecimento ζ associado a esse par de polos.
 - (c) Determinar a função de transferência $G(s)$.
 - (d) No Matlab, conferir se a função de transferência obtida possui mesmo o diagrama de Bode mostrado na Figura 17. Conferir também as margens de ganho e fase medidas no Item 23a.
24. Considere o diagrama de Bode mostrado na Figura 18. Sabe-se que o sistema é de fase mínima (não possui polos nem zeros no semiplano direito do plano s).
- (a) Obter as frequências de cruzamento de ganho e de fase e analisar a estabilidade via as margens de ganho e fase.
 - (b) Determinar o ganho K tal que a margem de fase seja 40° .
 - (c) Determinar o tipo do sistema e calcular o erro de regime permanente para entrada degrau e rampa. Dica: lembrar que o erro de regime pode ser obtido via o teorema do valor final usando $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s)$ e, portanto, só precisa do ganho K da função de transferência.

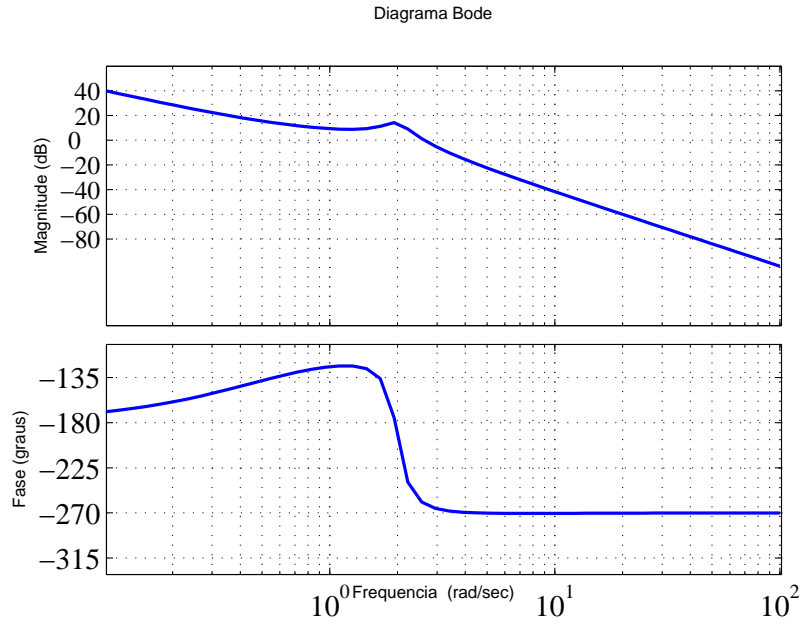


Figura 17: Diagrama de Bode de um sistema determinado experimentalmente do Exercício 23.

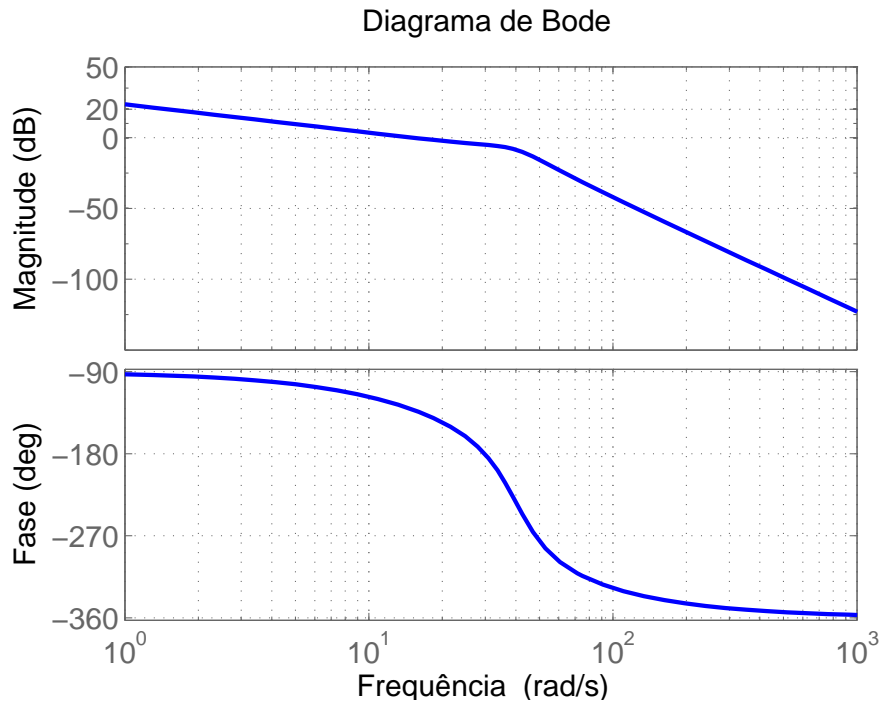


Figura 18: Diagrama de Bode do Exercício 24.

Exercícios Capítulo 7

25. Discretização e transformada \mathcal{Z} . Dado um sistema representado pela equação diferencial a seguir:

$$4 \ddot{y}(t) + 2 \dot{y}(t) + y(t) = 2 u(t)$$

considere o período de amostragem $T_s = 1$ s.

- (a) Obtenha a respectiva representação discreta por equação diferença usando:
 - i. aproximação da derivada;
 - ii. por transformada de Laplace convertida em \mathcal{Z} . Dica: Use o Matlab ou tabela de transformadas.

Compare as formas de representação discreta do sistema segundo estas aproximações.

- (b) Usando a equação diferença da resposta $y(k)$ do exercício (a) para uma entrada $u(t)$ dada por um degrau unitário, apresente uma resposta gráfica para $k = [0 : 10]$ em cada caso, ou seja, para a resposta dos itens de 25a.
- (c) Represente a resposta gráfica do Item 25a-ii no caso da função de excitação ser uma sequência de dois impulsos do tipo:

$$u(t) = \delta(t) + \delta(t - 2).$$

- (d) Obtenha a respectiva função discreta $y(k T_s)$ para o sistema considerando-se a entrada degrau do Item 25a-ii.

26. Estabilidade discreta. Considere um sistema de controle realimentado unitariamente e dotado de um controlador tipo proporcional de valor q_0 na malha direta, cujas funções de transferência discretas são dadas por:

$$H_0 G_P(z) = \frac{0,0573 z^{-1} + 0,0527 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} + 0,7788 z^{-2}}$$

$$G_C(z) = q_0 \quad \text{Controle Proporcional}$$

com $a_1 = 1,7238$.

- (a) Avalie a faixa de valores de q_0 que garantem a estabilidade do sistema em malha fechada. Neste caso resolver unicamente usando critérios analíticos (Shur-Cohn-Jury ou Bilinear).
- (b) Avalie o valor dos polos de malha fechada nesta situação. Dica: Use o Matlab e a ferramenta rltool.
- (c) Represente a resposta gráfica da saída para um valor de igual à metade do valor crítico obtido em (a).
- (d) Escolha um valor de q_0 tal que a resposta do sistema em Malha fechada responda como uma dinâmica de segunda ordem com coeficiente de amortecimento $\xi = 0,7$.
- (e) Fixando o valor para q_0 como sendo o obtido em (d), avalie a faixa de valores de a_1 tal que o sistema permaneça estável usando somente procedimentos com Matlab. Use o MEdit e escreva um programa para fornecer a faixa de valores de a_1 .

Exercícios Capítulo 8

27. Considere o servomecanismo para controle de posição da Figura 19. As seguintes especificações são estabelecidas:
- A resposta à uma referência degrau unitário não deve apresentar $M_p > 16\%$.
 - A resposta à uma referência degrau unitário não deve apresentar $t_r \leq 0,4s$.
 - O erro de regime permanente para uma entrada de referência rampa é $e_{ss} < 0,02$.
 - Projetar um controlador avanço de fase para atender as especificações da resposta dinâmica.
 - Com o controlador acima, calcular a constante de velocidade $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)G(s)$ e verificar que $e_{ss} = 0,25$.
 - Projetar um controlador atraso de fase em série com o controlador avanço para atender a especificação de erro de regime permanente.
 - Apresentar o lugar das raízes resultante do sistema realimentado com o controlador avanço-atraso.
 - Usar a interface gráfica rltool para projetar os controladores.
 - Apresentar a resposta à entrada de referência degrau e rampa para verificar o atendimento das especificações estabelecidas.

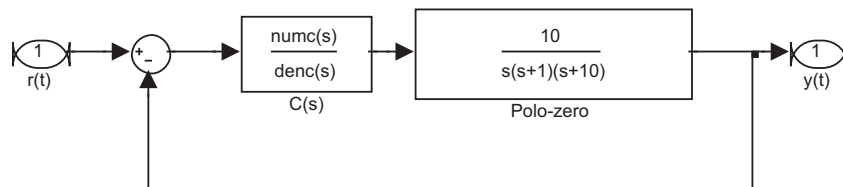


Figura 19: Sistema do Exercício 27.

28. Considere um sistema descrito por:

$$G(s) = \frac{e^{-Ts}}{(\tau s + 1)}$$

em que $T = 2$ e $\tau = 3$.

- Encontrar os parâmetros do controlador PID usando as regras de sintonia de Ziegler-Nichols:

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{RL} \\ T_i &= 2L \\ T_d &= 0,5L \end{aligned}$$

em que $R = A/\tau$ e $L = T$.

- (b) O sistema torna-se marginalmente estável para um ganho $K_u = 3,044$ com $P_u = 7s$. Obter os parâmetros do PID usando as regras de sintonia de Ziegler-Nichols:

$$\begin{aligned}K_P &= 0.6K_u \\T_i &= \frac{1}{2}P_u \\T_d &= \frac{1}{8}P_u\end{aligned}$$

em que P_u é o período de oscilação.

- (c) Com o uso do Matlab, plotar a resposta do sistema com os controladores obtidos nos Itens 28a e 28b.
29. Considere o controle de posição de um motor CC descrito por:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Pede-se projetar um controlador para obter $e_{ss} \leq 0,1$:

- (a) Escolher $K = 10$ para ter uma margem de fase de aproximadamente 45° .
- (b) Escolher a frequência de cruzamento de ganho ω_c para fornecer uma margem de fase de aproximadamente 45° .
- (c) Escolher o zero do controlador atraso $z \gg \omega_c$. Verificar que um controlador com $z=-0,1$ e $p=-0,01$ atende a especificação de projeto.

Exercícios Capítulo 9

30. Dado o processo a seguir representado pela sua respectiva equação diferença discreta:

$$\begin{aligned}y(k) + a_1 y(k-1) &+ 0,72 y(k-2) + 0,32 y(k-3) \\ &= 0,4 u(k-1) - 0,4 u(k-2) + 0,84 u(k-3)\end{aligned}$$

com $a_1 = 1,2$ para os Itens 30a- 30c abaixo:

- (a) Obtenha a descrição do processo em forma de função transferência discreta.
- (b) Obter a equação característica.
- (c) Verificar a estabilidade do processo com base na equação característica.
- (d) Admitir que o coeficiente a_1 é uma incógnita e usando o programa Matlab (e/ou Simulink) estabelecer os valores limites deste coeficiente para que o processo permaneça estável.
- (e) Plotar o lugar das raízes no plano-z para a faixa de possíveis valores de a_1 .
- (f) Fixar um valor de a_1 tal que o sistema seja estável e, admitindo que a entrada $u(k)$ seja do tipo degrau unitário, plotar o comportamento discreto da saída $y(k)$.

- (g) Apresentar a listagem de programas ou diagramas usados no Matlab.
 - (h) Indicar uma representação do sistema por variáveis de estado.
 - (i) Verificar se este sistema pode ser controlado por realimentação de estado verificando as matrizes de observabilidade e de controlabilidade.
31. Considere o processo do Exercício 25 e investigue os controladores sugeridos a seguir. Ajuste o intervalo de amostragem T_s para que seja adequado à dinâmica da resposta em malha fechada em cada caso. Avalie o projeto e desempenho do controlador sempre no modo discreto, ou seja, no plano- z .
- (a) Obtenha um controlador tipo proporcional para que a resposta ao degrau tenha dinâmica criticamente amortecida. Avalie o erro de regime e a ação de controle.
 - (b) Projete um controlador PI para obter um erro de regime nulo à entrada degrau e novamente com dinâmica da resposta criticamente amortecida.
 - (c) Troque o controlador PI por um PID e repita o Item 31b.
 - (d) Deduzir um controlador *dead-beat* tal que a ação de controle em $k = 0$ seja a mesma obtida no Item 31c com um PID.
 - (e) Verifique os quatro controladores do Simulink comparando as respostas da saída e da ação de controle de cada um.
32. Seja o processo contínuo descrito por:

$$\begin{aligned}
 G_P(s) &= G_{P1}G_{P2} \\
 &= \frac{5(s+2)}{(s+0,4)(s+0,1)}.
 \end{aligned}$$

- (a) Avalie um controlador PI para obter uma resposta ao degrau do sistema controlado com dinâmica dominante de 2ª ordem ($\xi = 0,7$) e tempo de pico igual a metade do tempo de resposta degrau em malha aberta.
- (b) Avalie um controlador PID para reduzir o tempo de pico do Item 32a pela metade e dinâmica semelhante.
- (c) Avalie um controlador *dead-beat* para obter uma saída com dinâmica próxima à do PID.
- (d) Considere a forma fatorada de $G_P(s)$ sendo a saída de cada subprocesso um estado. Formule a descrição do processo na forma espaço de estado.
- (e) Obtenha um controle por realimentação de estado tal que a dinâmica da resposta seja correspondente à dos polos dominantes do caso malha fechada com PID.
- (f) Obtenha um ganho do pré-filtro para corrigir o eventual erro de regime do Item 32e.
- (g) Obtenha um controle por realimentação de estado com ação integrativa para corrigir automaticamente o erro de regime do Item 32e.
- (h) Considere que somente um dos estado do processo possa ser medido e avalie para cada caso se o mesmo resulta em um sistema observável.

- (i) Com base no Item 32h acima, use um dos casos observáveis (se houver) e formule um observador de estado para o processo.
 - (j) Simule todos os casos de controle dos Itens 32a - 32e, bem como os casos de abordagem por espaço de estado no Simulink e compare as ações de controle e da saída do processo.
 - (k) Avalie para uma mesma janela de tempo a energia utilizada no controle através da integração discreta da ação de controle. Verifique qual dos casos necessita maior energia para realizar os controles propostos.
33. Nos Exercícios 31 e 32, use um dos procedimentos de discretização sugeridos na planta para obter uma representação discreta da mesma. Projete o controlador solicitado na forma discreta usando o rltool e a planta discretizada. Ao final, teste o controlador obtido com a planta contínua no Simulink.

Exercício Capítulo 10

34. Considere o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 2 \ 0] x. \quad (1)$$

Pede-se:

- (a) Verificar que o sistema é controlável e determinar a lei de realimentação de estado da forma $u = -K_c x$ tal que os autovalores da malha fechada sejam -4,-5,-2.
 - (b) Encontrar a matriz do observador K_f com polinômio característico dado por $s^3 + 12s^2 + 47s + 60$. Resolver o problema com a função Matlab acker para $A = A'$ e $B = C'$.
 - (c) Desenhar o diagrama de blocos do sistema incorporando o controlador e o observador encontrado em (a) e (b) acima.
 - (d) Obter a função de transferência do controlador baseado em observador $K(s)$: função de transferência entre $-u$ e y , usando as matrizes de ganho K_f e K_c calculadas.
35. Considere a planta nominal

$$G(s) = \frac{3(-2s + 1)}{(5s + 1)(10s + 1)}$$

e um controlador PI

$$K(s) = \frac{12s + 1}{12s}.$$

Para uma incerteza do tipo multiplicativa

$$P_{\Delta}(s) = G(s)[1 + W(s)\Delta(s)]$$

com $W(s)$ a função de ponderação dada por:

$$W(s) = \frac{10j\omega + 0.3}{2j\omega + 1}, |\Delta|_\infty < 1$$

Pede-se:

- Para o controlador dado, determinar se o sistema atende a condição de robustez de estabilidade utilizando o critério $\|WT\| < 1$.
- Supondo que a incerteza é do tipo real, para $\Delta = 0,2$ e $\Delta = 1$ calcular os polos da malha fechada (calcular a função Tzw) e comentar acerca da robustez de estabilidade.

36. Considere a planta nominal

$$G(s) = \frac{350}{s(s + 50)}.$$

Esta planta é bem conhecida em baixas frequências com desvio no ganho nominal de cerca 0,1% (abaixo de 20 rad/s) e se torna crescentemente incerta em altas frequências acima de 5000 rad/s (desvio de 20% do ganho nominal). Modelar o sistema como a planta nominal mais uma incerteza multiplicativa na entrada e encontrar a matriz de transferência P_Δ .

37. Seja o sistema realimentado mostrado na Figura 20 com a planta apresentando um polo incerto

$$P_\delta(s) = \frac{1}{s + 5 + \delta}, \delta \in [-0,1 \ 0,1].$$

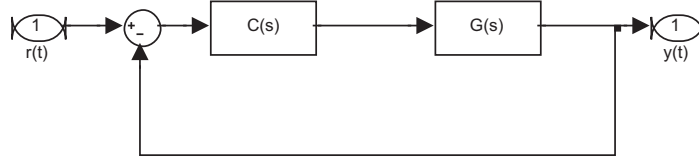


Figura 20: Diagrama em blocos do sistema do Exercício 37.

O objetivo do controle é fazer a saída seguir a referência com erro de regime menor que -20 dB. A referência varia lentamente com banda-limitada em frequências até 50 rad/s. Uma função de ponderação para a função sensibilidade (S) pode ser do tipo (lembre-se que $e = Sr$):

$$W_e(j\omega) = \frac{600}{j\omega + 50}$$

a qual garante um ganho maior do que 20 dB na faixa $[0, 20]$ rad/s.

Pede-se:

- Usando a função sysic do Matlab, obter a matriz aumentada do sistema conectado para $K=40$ e $K=500$.
- Plotar o diagrama do valor singular estruturado e verificar se a condição de robustez de estabilidade e desempenho é satisfeita.

- (c) Obter a menor perturbação desestabilizante e analisar os polos do sistema interconectado com essa perturbação. Usar a função do Matlab `dypert`.
38. A Figura 21 abaixo mostra o esquemático de um pêndulo invertido sobre um carrinho. Defina $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x$, $x_4 = \dot{x}$ com x o deslocamento do carrinho. O modelo do sistema pode ser escrito como:

$$\dot{x} = F(x, u)$$

em que

$$F(x) = \begin{bmatrix} \frac{g \sin x_1 - \frac{x_2^2 m \ell \sin 2x_1}{2M_T}}{\ell - \frac{m \ell \cos^2 x_1}{M_T}} - \frac{\frac{\cos x_1}{M_T}}{\ell - \frac{m \ell \cos^2 x_1}{M_T}} u \\ \frac{m \ell g \sin 2x_1 - \frac{m \ell^2 x_2^2 \sin x_1}{M_T}}{\frac{m \ell \cos^2 x_1}{M_T} - \ell} - \frac{\frac{\ell}{M_T}}{\frac{m \ell \cos^2 x_1}{M_T} - \ell} u \end{bmatrix}$$

com $m = 0,1$ kg, $M_T = 2,1$ kg, $\ell = 0,5$ m e $g = 9,8$ m/s².

- (a) Linearizar o sistema a partir da expansão de primeira ordem de Taylor's em torno de $x_1 = 0$.
- (b) Para Q uma matriz diagonal com $d_1 = 100; d_2 = 1; d_3 = 1; d_4 = 1$ e $R = 1$ obter uma lei de controle com realimentação de estado via o projeto de um regulador linear quadrático (LQR) para estabilizar o sistema. Analisar as margens de estabilidade do sistema realimentado. Escolher outros valores Q e R e repetir a análise.
- (c) Usando o critério de robustez de estabilidade para uma incerteza Δ do tipo multiplicativa, obter a maior norma $\|\Delta\|_\infty$ para robustez de estabilidade para as duas matrizes Q e R consideradas no Item 38b. Comentar os resultados de garantia de robustez de estabilidade obtidos com a lei de controle LQR.
39. Considere novamente o sistema de suspensão magnética. Defina $x_1 = h$, $x_2 = \dot{h}$, $x_3 = i$, e $y = h$ a saída do sensor de posição. O modelo do sistema pode ser escrito como

$$\dot{x} = F(x) + Bv, \quad y = Cx,$$

em que

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \left(\frac{L_0}{2am}\right) \left(\frac{x_3}{1+(x_1)/a}\right)^2 \\ -\frac{R}{L}x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_a/L \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \ 0 \ 0]$$

com $L = 5,2 \times 10^{-1}$ H, $R = 2,1 \times 10^1 \Omega$, $k_a = 2,1$ V/V, $c_1 = -1,7 \times 10^3$ V/m, $L_0 = 2,5 \times 10^{-4}$ H, $a = 6,7 \times 10^{-3}$ m, e $m = 2,2 \times 10^{-2}$ kg.

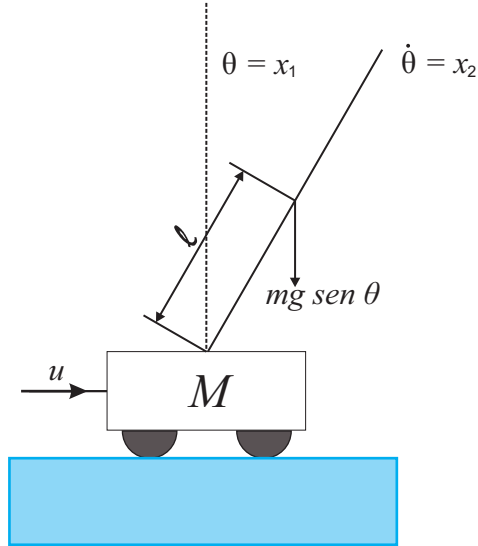


Figura 21: Esquemático do pêndulo invertido do Exercício 38.

- Linearizar o sistema a partir da expansão de primeira ordem de Taylor em torno de (h_e, i_e) para $\zeta = [h - h_e \quad \dot{h} \quad i - i_e]^T$ e $u = v - \frac{R i_e}{k_a}$ para $h_e = 4,0 \times 10^{-3}$ m.
- Para Q uma matriz diagonal com $d_1 = 30000, d_2 = 0, d_3 = 0$ e $R = 0,002$, obter um controlador do tipo LQR para estabilizar o sistema. Analisar as margens de estabilidade do sistema realimentado. Escolher outros valores Q e R e repetir a análise.
- Usando o critério de robustez de estabilidade para uma incerteza Δ do tipo multiplicativa, obter a maior norma $\|\Delta\|_\infty$ para robustez de estabilidade para as duas matrizes Q e R consideradas no Item 39b. Comentar os resultados de garantia de robustez de estabilidade obtidos com o controlador LQR.

40. Considere a decomposição por valores singulares

$$H = Y \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$$

em que $Y \in \mathcal{C}^{p \times p}$, $U \in \mathcal{C}^{m \times m}$ são matrizes unitárias e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ com $r \leq \min(p, m)$. As colunas de U são formadas por autovetores ortonormais de H^*H e as colunas de Y por autovetores ortonormais de HH^* . Mostrar que o valor singular pode ser computado a partir do problema de autovalor uma vez que σ_i^2 é um autovalor de H^*H , ou seja,

$$H^*H u_i = \sigma_i^2 u_i$$

com u_i um vetor coluna de U , isto é, o autovetor ortonormal associado.